

# Simulateur d'emprunts, formules et tableaux d'amortissement

Thibault Mondary  
Laboratoire de Recherche pour le Développement Local

<http://gipilab.org>

21 octobre 2015

## 1 Présentation

Un emprunt est caractérisé par :

- la somme empruntée (notée *sommeEmpruntee*) ;
- le taux d'intérêt annuel, en % (notée *tauxAnnuel*) ;
- la périodicité de remboursement (notée *periodicite*), qui peut être annuelle, semestrielle, trimestrielle ou mensuelle ;
- la durée totale de l'emprunt, exprimée nombre d'échéances (notée *duree*) ;
- la somme à rembourser à chaque échéance  $i$  (notée *paiement<sub>i</sub>*) ;

Connaissant la périodicité de remboursement et trois des quatre grandeurs caractérisant un emprunt, il est possible de calculer la grandeur manquante, ce qui permet de répondre à des questions comme :

- Quelle somme vais-je rembourser chaque année si j'emprunte 1 000 000 euros à 4,5% par an pendant 10 ans ? [calcul de l'échéance]
- Combien de temps durerait un emprunt de 1 000 000 euros à 4,5% par an en remboursant 126 378,72 euros tous les ans ? [calcul de la durée]
- Combien puis-je emprunter si je choisis de rembourser 126 378,72 euros par an pendant 10 ans avec un taux d'intérêt de 4,5% ? [calcul de la somme empruntée ou capital]
- Quel est le taux d'intérêt appliqué à un emprunt de 1 000 000 euros pendant 10 ans en remboursant 126 378,72 euros tous les ans ? [calcul du taux annuel]

La somme à rembourser à chaque échéance  $i$  est composée d'une part de capital (notée *partCapital<sub>i</sub>*) et d'une part d'intérêts (notée *partInterets<sub>i</sub>*). La répartition entre ces deux valeurs est déterminée par le *profil d'amortissement*. Un tableau d'amortissement présente ces valeurs de manière synthétique pour chaque échéance, un exemple est présenté sur le tableau 1.

Deux profils d'amortissement usuels sont présentés dans la suite de ce document, le profil à échéances constantes et celui à capital constant. Le profil à échéances constantes

TABLE 1 – Emprunt de 1 000 000 à 4,5% par an pendant 10 ans

i-eme	date	paiement	partCapital	partInterets	restant
1	16/09/2015	126 378,82	81 378,82	45 000	918 621,18
2	16/09/2016	126 378,82	85 040,87	41 337,95	833 580,31
3	16/09/2017	126 378,82	88 867,71	37 511,11	744 712,6
4	16/09/2018	126 378,82	92 866,75	33 512,07	651 845,85
5	16/09/2019	126 378,82	97 045,76	29 333,06	554 800,09
6	16/09/2020	126 378,82	101 412,82	24 966	453 387,27
7	16/09/2021	126 378,82	105 976,39	20 402,43	347 410,88
8	16/09/2022	126 378,82	110 745,33	15 633,49	236 665,54
9	16/09/2023	126 378,82	115 728,87	10 649,95	120 936,67
10	16/09/2024	126 378,82	120 936,67	5442,15	0,00
Total		1 263 788,22	1 000 000	263 788,22	

TABLE 2 – Emprunt de 1 000 000 à 4,5% par an pendant 10 ans, profil capital constant

i-eme	date	paiement	partCapital	partInterets	restant
1	16/09/2015	145 000,00	100 000,00	45 000,00	900 000,00
2	16/09/2016	140 500,00	100 000,00	40 500,00	800 000,00
3	16/09/2017	136 000,00	100 000,00	36 000,00	700 000,00
4	16/09/2018	131 500,00	100 000,00	31 500,00	600 000,00
5	16/09/2019	127 000,00	100 000,00	27 000,00	500 000,00
6	16/09/2020	122 500,00	100 000,00	22 500,00	400 000,00
7	16/09/2021	118 000,00	100 000,00	18 000,00	300 000,00
8	16/09/2022	113 500,00	100 000,00	13 500,00	200 000,00
9	16/09/2023	109 000,00	100 000,00	9 000,00	100 000,00
10	16/09/2024	104 500,00	100 000,00	4 500,00	0,00
Total		1 247 500,00	1 000 000,00	247 500,00	

impose que la somme remboursée lors de chaque échéance ne varie pas durant la durée de l'emprunt. Le profil d'amortissement à capital constant impose quant à lui que la part de capital contenue dans la somme remboursée lors de chaque échéance reste constante. En conséquence, la valeur remboursée à chaque paiement n'est plus constante.

Le tableau 2 présente le même emprunt que le tableau 1 mais avec un profil à capital constant. On remarque que si la somme empruntée est la même (1 000 000), le coût total de l'emprunt (total des échéances) est inférieur (1 247 500 par rapport à 1 263 788,22). En contrepartie durant la première moitié de la durée de l'emprunt, les sommes remboursées chaque année sont plus élevées.

## 2 Profil d'amortissement à échéances constantes

Dans la suite du document, la valeur de *periodicite* est définie comme le nombre de périodes dans une année, ainsi :

$$periodicite = \begin{cases} 12 & \text{en cas de remboursement mensuel} \\ 4 & \text{en cas de remboursement trimestriel} \\ 2 & \text{en cas de remboursement semestriel} \\ 1 & \text{en cas de remboursement annuel} \end{cases} \quad (1)$$

Dans cette section nous présentons les formules permettant de calculer la somme à payer, la somme empruntée, le taux d'intérêts annuel et la durée d'un emprunt dont l'amortissement s'effectue selon le profil à échéances constantes. La valeur de *periodicite* est supposée connue et est définie sur l'équation 1.

### 2.1 Calcul de la somme à payer à chaque échéance

*Quelle somme vais-je rembourser chaque année si j'emprunte 1 000 000 euros à 4,5% par an pendant 10 ans ?*

Soit un emprunt dont la somme empruntée, le taux annuel et la durée sont connus, la somme à payer à chaque échéance vaut :

$$paiement = \begin{cases} \frac{sommeEmpruntee}{duree} & \text{si } tauxAnnuel = 0 \\ \frac{sommeEmpruntee \times \frac{tauxAnnuel}{periodicite}}{1 - (1 + \frac{tauxAnnuel}{periodicite})^{-duree}} & \text{si } tauxAnnuel > 0 \end{cases} \quad (2)$$

### 2.2 Calcul de la somme empruntée

*Combien puis-je emprunter si je choisis de rembourser 126 378,72 euros par an pendant 10 ans avec un taux d'intérêt de 4,5% ?*

Soit un emprunt dont le taux annuel, la durée et la somme à payer à chaque période (*paiement*) sont connus, la somme empruntée vaut :

$$sommeEmpruntee = \begin{cases} \frac{paiement \times ((\frac{tauxAnnuel}{periodicite} + 1)^{duree} - 1)}{\frac{tauxAnnuel}{periodicite} \times (\frac{tauxAnnuel}{periodicite} + 1)^{duree}} & \text{si } tauxAnnuel \neq 0 \\ paiement \times duree & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

### 2.3 Calcul de la durée de l'emprunt

*Combien de temps durerait un emprunt de 1 000 000 euros à 4,5% par an en remboursant 126 378,72 euros tous les ans ?*

Soit un emprunt dont la somme empruntée, le taux annuel et la somme à payer lors de chaque échéance sont connus, sa durée vaut (arrondir à l'entier supérieur) :

$$duree = \begin{cases} \left\lceil \frac{\log(-(\text{paiement}/(\frac{\text{tauxAnnuel}}{\text{periodicite}} \times \text{sommeEmpruntee} - \text{paiement}))}{\log(1 + \frac{\text{tauxAnnuel}}{\text{periodicite}})} \right\rceil & \text{si } \text{tauxAnnuel} \neq 0 \\ \left\lceil \frac{\text{sommeEmpruntee}}{\text{paiement}} \right\rceil & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

## 2.4 Calcul du taux annuel

Quel est le taux d'intérêt appliqué à un emprunt de 1 000 000 euros pendant 10 ans en remboursant 126 378,72 euros tous les ans ?

Soit un emprunt dont la somme empruntée, la durée et la somme à payer lors de chaque échéance sont connus. Il n'existe pas de formule mathématique pour déterminer directement le taux annuel. Une solution simple pour approximer le taux annuel est de faire varier la valeur du taux, de calculer *paiement* à l'aide de ce taux, puis de mesurer l'écart obtenu entre le *paiement* connu et le *paiement* calculé, comme présenté sur l'algorithme 1.

## 3 Profil d'amortissement à capital constant

Dans cette section nous présentons les formules permettant de calculer la somme à payer, la somme empruntée, le taux d'intérêts annuel et la durée d'un emprunt dont l'amortissement s'effectue selon le profil à capital constant, c'est-à-dire pour lequel la valeur de *partCapital* ne change pas. La valeur de *periodicite* est supposée connue et est définie sur l'équation 1.

### 3.1 Calcul de la somme à payer à la première échéance

Quelle somme vais-je rembourser la première année<sup>1</sup> si j'emprunte 1 000 000 euros à 4,5% par an pendant 10 ans ?

Soit un emprunt dont la somme empruntée, le taux annuel et la durée sont connus, la somme à payer lors de la première échéance vaut :

$$\text{paiement}_1 = \text{sommeEmpruntee} \times \frac{\text{tauxAnnuel}}{\text{periodicite}} + \frac{\text{sommeEmpruntee}}{\text{duree}} \quad (5)$$

### 3.2 Calcul de la somme empruntée

Combien puis-je emprunter si je choisis de rembourser 126 378,72 euros lors de la première échéance, pendant 10 ans avec un taux d'intérêt de 4,5% ?

Soit un emprunt dont le taux annuel, la durée et la somme à payer lors de la première période (*paiement*<sub>1</sub>) sont connus, la somme empruntée vaut :

---

1. Dans ce profil *paiement* étant variable les autres échéances se retrouvent en calculant le tableau d'amortissement.

**Entrées :** *paiement, sommeEmpruntee, duree, periodicite*

**Résultat :** Le taux annuel ou  $-1$  en cas de taux non trouvé

```
1 si sommeEmpruntee = paiement × duree alors retourner 0;
2 maxIterations ← 1000000; iteration ← 0;
  /* Taux calculé et pas d'incrémentation */
3 increment ← 100000; tauxAnnuel ← 0,000001;
  /* Granularité maxi pour increment et valeur calculée */
4 diviseurMax ← 0,00001; paiementCalcule ← 0;
5 sensVariationTaux ← faux; compteurRebonds ← 0;
6 tant que iteration < maxIterations et compteurRebonds < 4 et tauxAnnuel > 0
  faire
7   iteration ← iteration + 1;
  /* Calcule la somme à payer avec le taux en cours */
8   paiementCalcule ←
    calculePaiementEcheanceConstante(sommeEmpruntee, tauxAnnuel, duree, periodicite);

  /* Compare avec la somme à payer attendue */
9   si paiementCalcule = paiement alors retourner tauxAnnuel;
10  sinon si paiementCalcule < paiement alors
11    tauxAnnuel ← tauxAnnuel + increment;
12    si sensVariationTaux = faux alors
13      si increment > diviseurMax alors increment ← increment ÷ 10 ;
14      sensVariationTaux ← vrai;
15      compteurRebonds ← compteurRebonds + 1;
16    fin si
17    sinon compteurRebonds ← 0;
18  fin si
19  sinon
20    tauxAnnuel ← tauxAnnuel – increment;
21    si sensVariationTaux = vrai alors
22      si increment > diviseurMax alors increment ← increment ÷ 10 ;
23      sensVariationTaux ← faux;
24      compteurRebonds ← compteurRebonds + 1;
25    fin si
26    sinon compteurRebonds ← 0;
27  fin si
28 fin tq
29 si tauxAnnuel < 0 ou iteration = maxIterations alors retourner -1;
30 sinon retourner tauxAnnuel;
```

**Algorithme 1 :** Approximation du taux d'intérêts annuel, échéances constantes

$$sommeEmpruntee = \frac{paiement_1 \times duree}{\frac{tauxAnnuel}{periodicite} \times duree + 1} \quad (6)$$

### 3.3 Calcul de la durée de l'emprunt

Combien de temps durerait un emprunt de 1 000 000 euros à 4,5% par an, en remboursant 126 378,72 euros la première année ?

Soit un emprunt dont la somme empruntée, le taux annuel et la somme à payer lors de la première échéance ( $paiement_1$ ) sont connus, sa durée vaut (arrondir à l'entier supérieur) :

$$duree = \lceil \frac{sommeEmpruntee}{paiement_1 - (sommeEmpruntee \times \frac{tauxAnnuel}{periodicite})} \rceil \quad (7)$$

### 3.4 Calcul du taux annuel

Quel est le taux d'intérêt appliqué à un emprunt de 1 000 000 euros pendant 10 ans en remboursant 126 378,72 euros la première année ?

Soit un emprunt dont la somme empruntée, la durée et la somme à payer lors de la première période sont connus. Le taux annuel est déterminé par :

$$tauxAnnuel = \frac{paiement_1 - \frac{sommeEmpruntee}{duree}}{sommeEmpruntee} \times periodicite \quad (8)$$

## 4 Construction des tableaux d'amortissement

Les tableaux d'amortissement se construisent ligne par ligne. L'algorithme 2 présente la construction d'un tableau pour le profil à échéances constantes, tandis que l'algorithme 3, très similaire, se focalise sur le profil à capital constant.

**Entrées :** *sommeEmpruntee, tauxAnnuel, periodicite, duree, dateDebut*  
**Résultat :** Le tableau d'amortissement

```

/* Structure de données représentant une ligne du tableau */
1 structure {
2   | ieme : entier positif
3   | date : date
4   | paiement : réel positif
5   | partCapital : réel positif
6   | partInterets : réel positif
7   | restantDu : réel positif
8 } Echeance;
/* Le tableau d'amortissement est une liste d'échéances */
9 tableauAmortissement ← liste < Echeance > ();

/* Calcule la valeur précise de l'échéance */
10 paiement ←
    calculePaiementEcheanceConstante(sommeEmpruntee, tauxAnnuel, duree, periodicite);

11 dateEcheance ← dateDebut;
12 tauxPeriodique ← tauxAnnuel ÷ periodicite;
13 partInterets ← sommeEmpruntee × tauxPeriodique;
14 partCapital ← paiement – partInterets;
15 restantDu ← sommeEmpruntee – partCapital;
16 pour i ← 1 à duree faire
17   | suivant periodicite faire
18     | cas où 12 //mensuelle
19     | | dateEcheance ← dateEcheance + 1 mois
20     | cas où 4 //trimestrielle
21     | | dateEcheance ← dateEcheance + 3 mois
22     | cas où 2 //semestrielle
23     | | dateEcheance ← dateEcheance + 6 mois
24     | cas où 1 //annuelle
25     | | dateEcheance ← dateEcheance + 12 mois
26   | fin d'alternative
27   | uneEcheance ← {ieme ← i; date ← dateEcheance; paiement ←
    | paiement; partCapital ← partCapital; partInterets ←
    | partInterets; restantDu ← restantDu};
28   | tableauAmortissement.ajouter(uneEcheance);
29   | partInterets ← restantDu × tauxPeriodique;
30   | partCapital ← paiement – partInterets;
31   | restantDu ← restantDu – partCapital;
32 fin pour
33 retourner tableauAmortissement;

```

**Algorithme 2 :** Tableau d'amortissement échéances constantes

**Entrées :** *sommeEmpruntee, tauxAnnuel, periodicite, duree, dateDebut*

**Résultat :** Le tableau d'amortissement

```
/* Structure de données représentant une ligne du tableau */
1 structure {
2   | ieme : entier positif
3   | date : date
4   | paiement : réel positif
5   | partCapital : réel positif
6   | partInterets : réel positif
7   | restantDu : réel positif
8 } Echeance;
/* Le tableau d'amortissement est une liste d'échéances */
9 tableauAmortissement ← liste < Echeance > ();

/* Calcule la valeur précise de la première échéance */
10 paiement ←
   calculePaiementCapitalConstant(sommeEmpruntee, tauxAnnuel, duree, periodicite);

11 dateEcheance ← dateDebut;
12 tauxPeriodique ← tauxAnnuel ÷ periodicite;
13 partInterets ← sommeEmpruntee × tauxPeriodique;
14 partCapital ← sommeEmpruntee ÷ duree;
15 restantDu ← sommeEmpruntee – partCapital;
16 pour i ← 1 à duree faire
17   | suivant periodicite faire
18     | cas où 12 //mensuelle
19     | | dateEcheance ← dateEcheance + 1 mois
20     | cas où 4 //trimestrielle
21     | | dateEcheance ← dateEcheance + 3 mois
22     | cas où 2 //semestrielle
23     | | dateEcheance ← dateEcheance + 6 mois
24     | cas où 1 //annuelle
25     | | dateEcheance ← dateEcheance + 12 mois
26   | fin d'alternative
27   | uneEcheance ← {ieme ← i; date ← dateEcheance; paiement ←
   | paiement; partCapital ← partCapital; partInterets ←
   | partInterets; restantDu ← restantDu};
28   | tableauAmortissement.ajouter(uneEcheance);
29   | partInterets ← restantDu × tauxPeriodique;
30   | restantDu ← restantDu – partCapital;
31   | paiement ← partInterets + partCapital;
32 fin pour
33 retourner tableauAmortissement;
```

**Algorithme 3 :** Tableau d'amortissement capital constant



Cette oeuvre du Laboratoire de Recherche pour le Développement Local est mise à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>